55. Internationale PhysikOlympiade
Paris, Frankreich 2025

Wettbewerbsleitung

Dr. Stefan Petersen
Tel.: 0431 / 880 - 5120
email: petersen@ipho.info

Dürken Quaas
Tel.: 0431 / 880 - 5387
email: quaas@ipho.info

Anschrift: IPN · Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62, 24118 Kiel

web: **www.ipho.info**

Lösungen zu den Aufgaben der 2. Runde im Auswahlwettbewerb zur 55. IPhO 2025

Hinweise

Die 2. Runde des Auswahlwettbewerbs zur Internationalen PhysikOlympiade 2025 wurde als Klausurrunde durchgeführt. Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler hatten für die Bearbeitung der Aufgaben drei Zeitstunden zur Verfügung und haben die Klausur in der Regel an ihrer Schule absolviert. Neben Hinweisen zur Klausur sind nachfolgend die Aufgaben mit einem Lösungsvorschlag zu finden.

Die Korrektur der Klausur der 2. Runde erfolgt auf Grundlage dieser Musterlösung. Gemäß den Gepflogenheiten bei der Internationalen PhysikOlympiade wird dabei primär die Richtigkeit und Nachvollziehbarkeit der Lösung bewertet und weniger die Sauberkeit der Ausarbeitung oder der sprachliche Ausdruck.

Im Korrekturprozess kann noch eine Anpassung der Bewertungsvorschläge notwendig werden.

Bei den Multiple-Choice Aufgaben wird für den jeweils richtigen Antwortbuchstaben jeweils 1 Punkt vergeben. Die in den Bewertungstabellen darüber hinaus angegebenen Punktzahlen beziehen sich jeweils auf den von uns ausgearbeiteten Lösungsweg. Bei anderen Lösungswegen wird die Bewertung sinngemäß abgeändert, wobei die Gesamtpunktzahl pro Aufgabenteil beibehalten wird. Folgefehler werden in der Regel nicht bestraft. Die Verwendung eines falschen Zwischenergebnisses sollte, sofern sich dadurch keine starke Vereinfachung des Problems ergibt, also bei folgenden Fragen nicht zu Punktabzug führen. Dies bedeutet insbesondere, dass ein numerisches Ergebnis auch dann als korrekt gewertet wird, wenn vorher eine falsche Formel abgeleitet, aber korrekt mit dieser Formel weitergerechnet wurde. Wenn bei einem Ergebnis jedoch die resultierende Einheit falsch ist, führt dies in jedem Fall zu Punktabzug.

Bei Fragen oder Anmerkungen freuen wir uns über eine Nachricht an ipho@ipho.info.

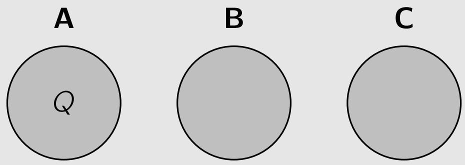
Multiple-Choice Aufgaben

Finde zu jeder der folgenden sieben Fragen den richtigen Lösungsbuchstaben und begründe physikalisch, warum dies die korrekte Lösung ist. Es ist jeweils nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Nutze den Platz in der Box für Rechnungen sowie Begründungen und notiere deinen Antwortbuchstaben an der vorgesehenen Stelle am Ende jeder Box.

Aufgabe 1 Geladene Kugeln (MC-Aufgabe) (5.0 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Von den drei abgebildeten, gleich großen Metallkugeln ist die Kugel **A** mit einer Ladung Q aufgeladen. Die Kugeln **B** und **C** sind anfänglich ungeladen. Nun werden zunächst die beiden Kugeln **A** und **B** leitend in Kontakt gebracht und anschließend wieder getrennt.



Das Gleiche wird nacheinander mit den Kugeln **A** und **C** sowie schließlich mit den Kugeln **B** und **C** gemacht. Du kannst davon ausgehen, dass sich immer nur die beiden jeweils in Kontakt gebrachten Kugeln gegenseitig beeinflussen und sich die dritte in großer Entfernung befindet.

Welche Ladung trägt am Ende die Kugel **C**?

A $\frac{1}{4}Q$ B $\frac{1}{3}Q$ C $\frac{3}{8}Q$ D $\frac{1}{2}Q$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Bei jedem Kontakt findet ein Ladungsausgleich zwischen den leitenden Metallkugeln statt. Die folgende Tabelle zeigt die sich daraus ergebenden Ladungen der Kugeln nach den jeweiligen Ladungsumverteilungen.

Kontakt	Ladung Kugel **A**	Ladung Kugel **B**	Ladung Kugel **C**
ohne	Q	0	0
A-B	$\frac{1}{2}Q$	$\frac{1}{2}Q$	0
A-C	$\frac{1}{4}Q$	$\frac{1}{2}Q = \frac{4}{8}Q$	$\frac{1}{4}Q = \frac{2}{8}Q$
B-C	$\frac{1}{4}Q$	$\frac{3}{8}Q$	$\frac{3}{8}Q$

Die Ladung der Kugel **C** beträgt also am Ende $\frac{3}{8}Q$.

Korrekte Antwort: *C*

Bemerkung: Die Antwortoption A ergibt sich, wenn angenommen wird, dass sich die Kugeln **B** und **C** die Hälfte der Ladung teilen. Antwortoption B entspricht einer Gleichverteilung der Ladungen auf die drei Kugeln. Antwortoption D folgt, wenn angenommen wird, dass immer die Hälfte der Ladung der Kugel mit mehr Ladung auf die mit geringerer Ladung übergeht.

Bewertung - Geladene Kugeln (MC-Aufgabe)		**Punkte**
1	Erkennen, dass bei jedem Kontakt ein vollständiger Ladungsausgleich stattfindet	1.0
	Bestimmen der Ladungen nach den einzelnen Umladungsvorgängen	3.0
	Angeben der korrekten Lösung	1.0
		5.0

Aufgabe 2 Steinfall (MC-Aufgabe) (5.0 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Ein Stein fällt senkrecht nach unten. In den ersten drei Sekunden des Falls legt er die gleiche Strecke zurück wie in der letzten Sekunde vor dem Aufprall. Reibung soll bei dem Fall vernachlässigt werden.

Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf der Erde auf?

A etwa $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ B etwa $120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ C etwa $140\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ D etwa $180\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Die in den ersten drei Sekunden zurückgelegte Fallstrecke s ist mit $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ gegeben durch

$$s = \frac{1}{2}\,g\,(3\,t)^2\,. \tag{2.1}$$

Diese Strecke muss gleich der in der letzten Sekunde des Falls zurückgelegten Distanz sein. Daher gilt ebenfalls

$$s = \frac{1}{2}\,g\left(T^2 - (T-t)^2\right), \tag{2.2}$$

wobei T die Gesamtfallzeit angibt. Durch Gleichsetzen von (2.1) und (2.2) ergibt sich für die Fallzeit

$$9\,t^2 = 2\,t\,T - t^2 \qquad \text{und damit} \qquad T = 5\,t = 5{,}0\,\mathrm{s}\,. \tag{2.3}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit nach der Fallzeit T beim Aufprall

$$\boxed{v = g\,T = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 5{,}0\,\mathrm{s} \approx 49\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 177\,\mathrm{km\,h^{-1}}}\,. \tag{2.4}$$

Die Aufprallgeschwindigkeit entspricht also von den gegebenen Antwortalternativen am ehesten $180\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Korrekte Antwort: *D*

Bemerkung: Die Antwortoption A ergibt sich, wenn die Aufprallgeschwindigkeit in $\mathrm{m\,s^{-1}}$ angegeben wird. Antwortoption B folgt als Wert aus der falschen Formel $v = \frac{1}{2}\,g\,T^2$ ohne Umrechnung in $\mathrm{km\,h^{-1}}$. Antwortoption C ist der Wert der Aufprallgeschwindigkeit für eine Fallzeit von $3\,\mathrm{s} + 1\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{s}$.

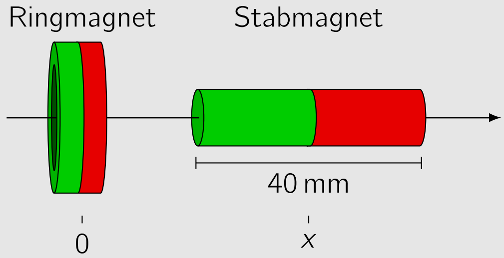
Bewertung - Steinfall (MC-Aufgabe)		**Punkte**
2	Angeben eines Ausdrucks für die anfängliche Fallstrecke (2.1)	1.0
	Angeben eines Ausdrucks für die finale Fallstrecke (2.2)	1.0
	Gleichsetzen der Fallstrecken und bestimmen der Fallzeit (2.3)	1.0
	Angeben eines Ausdrucks für die Geschwindigkeit in (2.4)	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	1.0
		5.0

Hinweis zur Bewertung: Wenn die in (2.1) bestimmte Strecke benutzt wird, um die Geschwindigkeit ohne Berücksichtigung der Beschleunigung in der letzten Sekunde vor dem Aufprall nach $v = s/t$ zu bestimmen, ergibt sich diese zu etwa $160\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ und Teilnehmende könnten auch auf Antwortoption D kommen. In diesem Fall sollte der Punkt für den Ausdruck der finalen Fallstrecke nicht gegeben werden.

Aufgabe 3 Magnetkraft (MC-Aufgabe) (5.0 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

In einem Experiment wird die Kraftwirkung zwischen einem Ringmagneten und einem Stabmagneten untersucht. Die Pole der beiden Magnete sind dabei, wie in der Abbildung zu sehen, in die gleiche Richtung orientiert. Der Stabmagnet ist entlang der eingezeichneten Achse verschiebbar. Der Graph zeigt die Kraft auf den Stabmagneten in Abhängigkeit von dessen Position x auf der Achse.



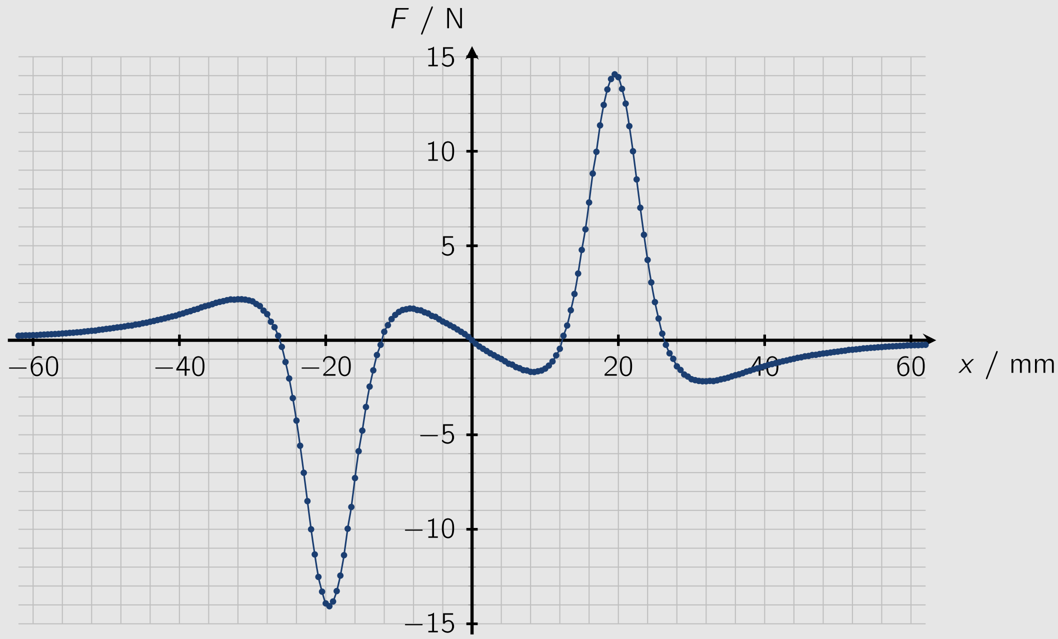


Abb. 1. *Graph der Kraft auf den Stabmagneten in Abhängigkeit von der Position x.*

Aus dem Graphen lassen sich die Gleichgewichtspositionen des Stabmagneten entlang der Achse ablesen. Eine Gleichgewichtsposition wird dabei als stabil bezeichnet, wenn der Magnet bei kleiner Auslenkung zu dieser Position zurückkehrt. Nun wird der Stabmagnet umgedreht, so dass die Pole der Magnete entgegengesetzt orientiert sind.

Wie viele stabile Gleichgewichtspositionen entlang der Achse gibt es für den Stabmagneten bei dieser Orientierung?

A 1 B 2 C 3 D 5

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Eine Gleichgewichtsposition liegt vor, wenn die Kraft auf den Stabmagneten gleich Null ist. In dem gegebenen Graphen für die ursprüngliche Konfiguration ist dies bei etwa $x = -26\,\mathrm{mm}$, $-12\,\mathrm{mm}$, $0\,\mathrm{mm}$, $12\,\mathrm{mm}$ und $26\,\mathrm{mm}$ der Fall. Stabil sind nur die Gleichgewichte, bei denen eine Veränderung der x-Koordinate in positive Richtung zu einer Kraft in negative x-Richtung führt und eine Verschiebung in negative Richtung zu einer Kraft in positive Richtung. Dies ist nur für die drei

Gleichgewichtspositionen bei $\pm 26\,\mathrm{mm}$ sowie bei $0\,\mathrm{mm}$ der Fall. Die beiden Gleichgewichtspositionen bei $\pm 12\,\mathrm{mm}$ sind instabil.

Wird nun der Stabmagnet umgedreht, dreht sich auch das Vorzeichen der Kraft um. Damit werden stabile zu instabilen und instabile zu stabilen Gleichgewichtspositionen. Es existieren also zwei stabile Gleichgewichtspositionen entlang der Achse für den Fall der entgegengesetzt orientierten Magnete. Damit ist Antwort B korrekt.

Korrekte Antwort: *B*

Bewertung - Magnetkraft (MC-Aufgabe)		**Punkte**
3	Identifikation von Nullstellen des Graphen mit Gleichgewichtspositionen	1.0
	Verknüpfen der (In-)Stabilität mit dem Verlauf oder der Steigung des Graphen	2.0
	Erkennen, dass das Umdrehen zu einem Vorzeichenwechsel der Kraft führt	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	1.0
		5.0

Aufgabe 4 Gasexpansion (MC-Aufgabe) (5.0 Pkt.)

Eine Menge eines idealen Gases expandiert von einem Anfangszustand zu einem Zustand mit doppeltem Volumen.

Verrichtet das Gas mehr Arbeit, wenn die Expansion isobar, also bei konstantem Druck oder isotherm, also bei konstanter Temperatur, erfolgt?

A Das Gas verrichtet mehr Arbeit bei der isobaren Expansion.

B Das Gas verrichtet mehr Arbeit bei der isothermen Expansion.

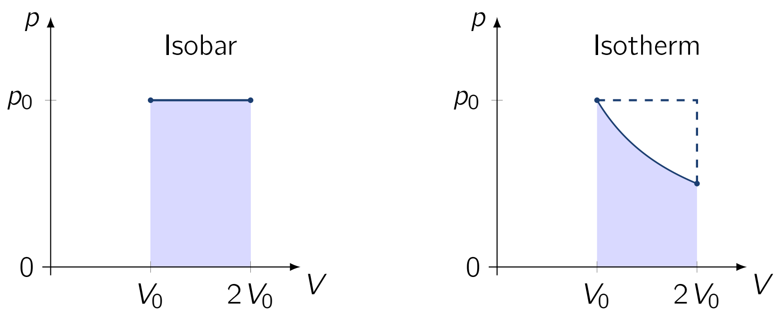
C Das Gas verrichtet in beiden Fällen die gleiche Arbeit.

D Es lässt sich mit den gegebenen Informationen nicht entscheiden, in welchem Fall mehr Arbeit verrichtet wird.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Bezeichne mit p den Druck und mit V das Volumen des idealen Gases. Die von dem Gas während der Expansion an der Umgebung verrichtete Arbeit kann als Fläche unter der Zustandskurve im p-V-Diagramm bestimmt werden[a]. Die folgende Abbildung zeigt die beiden Kurven für die isobare und isotherme Zustandsänderung vom Anfangszustand mit Druck p_0 und Volumen V_0 zu einem Zustand mit doppeltem Volumen.



An den Graphen ist klar zu erkennen, dass die mit der Achse eingeschlossene Fläche im Fall der isobaren Expansion größer ist und damit auch mehr Arbeit an der Umgebung verrichtet wird.

Hinweis: Dieses Ergebnis lässt sich auch durch andere, äquivalente Überlegungen erreichen, z. B. die folgende. Bei einer isothermen Ausdehnung sinkt der Druck mit steigendem Volumen nach der Zustandsgleichung idealer Gase. Daher ist bei gleichem Volumen die Kraft, die auf die Begrenzung des Volumens wirkt, kleiner als bei der isobaren Expansion und die verrichtete Arbeit insgesamt geringer.

Korrekte Antwort: *A*

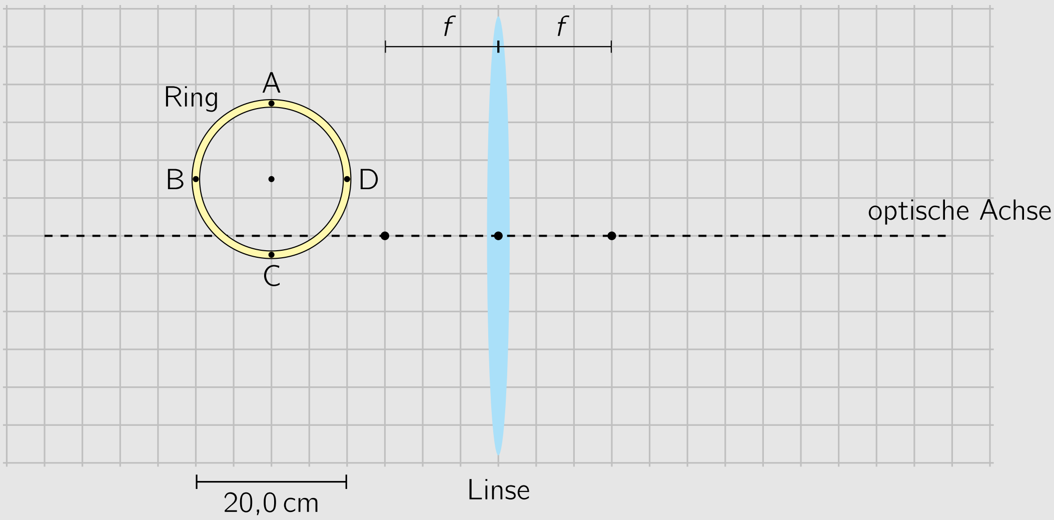
[a] Bei einer kleinen Expansion ΔV des Volumens verrichtet das Gas eine Arbeit $\Delta W = p\,\Delta V$ an der Umgebung. Die insgesamt verrichtete Arbeit ergibt sich dann aus der Aufsummierung bzw. Integration aller Beiträge.

Bewertung - Gasexpansion (MC-Aufgabe)		**Punkte**
4	Nutzen, dass die verrichtete Arbeit der Fläche unter der Zustandskurve entspricht	1.0
	Angeben (z.B. graphisch) der Fläche im isobaren Fall	1.0
	Angeben (z.B. graphisch) der Fläche im isothermen Fall	1.0
	Vergleich der beiden Flächen	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	1.0
		5.0

Aufgabe 5 Bild eines leuchtenden Rings (MC-Aufgabe) (5.0 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Mit Hilfe einer dünnen Linse wird ein leuchtender Ring abgebildet. Die Position und Größe des Rings sind in der maßstabsgetreuen Abbildung gezeigt. Die Brennweite f der Linse beträgt 15 cm und die Dicke des Rings kann vernachlässigt werden.



Das Verhältnis der Länge der Strecke von B nach D zu der Länge der Strecke von A nach C ist 1.

Wie groß ist das Verhältnis der Streckenlängen zwischen den entsprechenden Punkten im Bild des Rings?

A 0,6 B 1,0 C 1,8 D 2,0

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Für die Lösung wird das Abbildungsverhalten dünner Linsen bei achsennahen Strahlen verwendet.

Lösungsvariante 1 - Eine Möglichkeit zur Lösung ist die Konstruktion der Bildpunkte von A, B, C und D. Dafür kann, wie in Abbildung 2 für die Konstruktion des Bildpunktes von A skizziert, der Verlauf folgender ausgezeichneter Strahlen verwendet werden:

- Strahlen durch den Mittelpunkt der Linse werden nicht abgelenkt,
- Strahlen, die auf der Gegenstandsseite parallel zur optischen Achse verlaufen, gehen nach der Linse durch den Brennpunkt,
- Strahlen, die vor der Linse durch den Brennpunkt gehen, verlaufen auf der Bildseite parallel zur optischen Achse.

Mit mindestens zwei solcher Strahlen kann zu jedem Punkt auf dem Ring der entsprechende Bildpunkt konstruiert werden. In Abbildung 2 ist das so konstruierte Abbild des Rings gezeigt.

Das gesuchte Streckenverhältnis $|\overline{B'D'}|/|\overline{A'C'}|$ lässt sich dann aus der maßstabsgetreuen Skizze ablesen zu

$$\boxed{\frac{|\overline{B'D'}|}{|\overline{A'C'}|} \approx \frac{40\,\text{cm}}{20\,\text{cm}} = 2{,}0} \,. \tag{5.1}$$

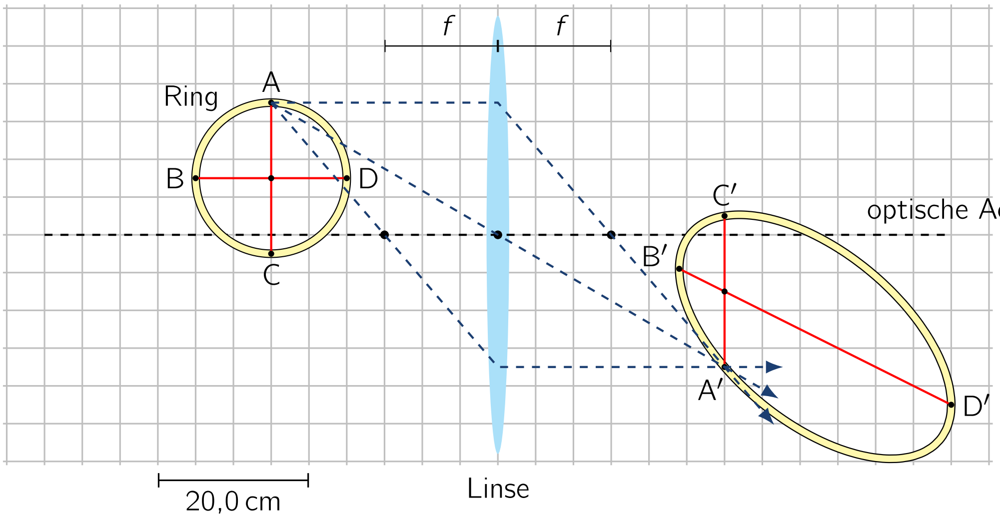


Abb. 2. *Lösungsskizze zur Abbildung des Rings. Die Dicke des Rings wurde bei der Abbildung nicht berücksichtigt.*

Sofern bekannt, kann man zusätzlich in die Konstruktion mit einfließen lassen, dass Punkte in einer Entfernung von der doppelten Brennweite von der Linsenebene durch die Linse auf Punkte abgebildet werden, deren Entfernung von der Linsenebene ebenfalls der doppelten Brennweite entspricht. Damit muss nach dem Strahlensatz die Länge der vertikalen Strecke $\overline{A'C'}$ gleich der Länge der Strecke $\overline{AC}$ sein.

Lösungsvariante 2 - Alternativ kann die Abbildungsgleichung für dünne Linsen zusammen mit der Maßstabsgleichung verwendet werden. Bezeichne mit (x, y) die Koordinaten eines Gegenstandpunktes in dem Koordinatensystem der Abbildung in der Aufgabe und mit (x', y') die Koordinaten des entsprechenden Bildpunktes. Dabei sei der Nullpunkt des Koordinatensystems in der Linsenmitte und die x-Achse verläuft entlang der optischen Achse von links nach rechts.

Dann gelten mit der Brennweite f der Linse die Abbildungs- und Maßstabsgleichung

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} \,. \tag{5.2}$$

Das Minuszeichen in der Abbildungsgleichung ist dabei auf die Wahl des Koordinantensystems zurückzuführen, in dem Punkte auf dem Ring trotz positiver Gegenstandsweite eine negative x-Koordinate haben. Aus (5.2) folgt für die Bildkoordinaten

$$\boxed{x' = \frac{f\,x}{f+x}} \qquad \text{sowie} \qquad \boxed{y' = \frac{f\,y}{f+x}} \,. \tag{5.3}$$

Damit lassen sich die Koordinaten der Abbilder der vier Punkte A: $(-30{,}0, 17{,}5)$, B: $(-40{,}0, 7{,}5)$, C: $(-30{,}0, -2{,}5)$ und D: $(-20{,}0, 7{,}5)$ in cm bestimmen zu

$$\mathrm{A}' : (30{,}0, -17{,}5) \qquad \mathrm{B}' : (24{,}0, -4{,}5) \qquad \mathrm{C}' : (30{,}0, 2{,}5) \qquad \mathrm{D}' : (60{,}0, -22{,}5) \,. \tag{5.4}$$

Für das gesuchte Verhältnis der Strecken ergibt sich daraus

$$\boxed{\frac{|\overline{B'D'}|}{|\overline{A'C'}|} \approx \frac{\sqrt{(60{,}0-24{,}0)^2+(22{,}5-4{,}5)^2}}{20{,}0} \approx 2{,}0}\,. \tag{5.5}$$

Korrekte Antwort: *D*

Bemerkung: Die Antwortoption A ergibt sich, wenn nur die Maßstabsänderung am Punkt B berücksichtigt wird. Antwortoption B entspricht der (nicht vorhandenen) Maßstabsänderung eines sehr kleinen Gegenstandes, der sich im Abstand der doppelten Brennweite vor der Linse befindet. Antwortoption C folgt, wenn im Abbild nur die Verschiebung der Bildpunkte in horizontale Richtung berücksichtigt wird, die Maßstabsänderung in y-Richtung aber außer acht gelassen wird.

Bewertung - Bild eines leuchtenden Rings (MC-Aufgabe)		**Punkte**
5	Nutzen der Abbildungseigenschaften der dünnen Linse (Konstruktionsmethode oder Formeln)	1.0
	Bestimmen der Bildpunkte zu B und D	1.0
	Bestimmen der Bildpunkte zu A und C oder angeben, dass $\lvert\overline{A'C'}\rvert = \lvert\overline{AC}\rvert$	1.0
	Berechnen des Längenverhältnisses (5.1) bzw. (5.5)	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	1.0
		5.0

Aufgabe 6 Zwillinge auf Reisen (MC-Aufgabe) (5.0 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Thomas Hellerl)

Max und Sepp sind Zwillinge. An ihrem gemeinsamen 20. Geburtstag startet Max von der Erde aus eine Reise ins All mit der konstanten Geschwindigkeit $\beta\, c$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist und $0 < \beta < 1$. Genau fünf Jahre später startet auch sein Zwillingsbruder Sepp und fliegt Max mit $v = 0{,}8\, c$ hinterher.

An dem Tag, an dem Sepp seinen Bruder Max einholt, stellen sie fest, dass beide wieder gemeinsam Geburtstag feiern können, aber sie wundern sich. Max feiert seinen 36. Geburtstag.

Den wievielten Geburtstag feiert Sepp?

A Sepp feiert seinen 30. Geburtstag.

B Sepp feiert seinen 32. Geburtstag.

C Sepp feiert seinen 34. Geburtstag.

D Sepp feiert seinen 40. Geburtstag.

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

t bezeichne die Zeitspanne zwischen Max' Start und dem Einholereignis gemessen im Erdsystem. $t' = 16\,\mathrm{a}$ ist die entsprechende Zeitdauer, die Max in seinem System registriert.

Die folgenden Rechnungen werden in der Einheit a (Jahre) durchgeführt. Wegen der Zeitdilatation gilt:

$$t' = t\,\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{t^2 - (\beta\, t)^2} \qquad \text{bzw.} \qquad {t'}^2 = 256 = t^2 - (\beta\, t)^2\,. \tag{6.1}$$

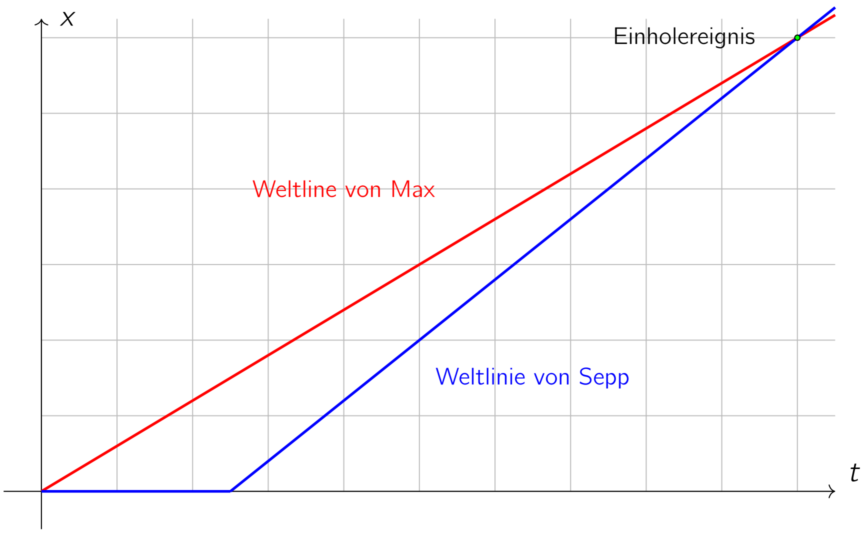


Abb. 3. *Weltlinien der Zwillinge aus Sicht der Erde (qualitative Darstellung).*

In Abbildung 3 sind die Weltlinien der beiden Zwillinge aus Sicht der Erde, also deren jeweiliger Abstand von der Erde als Funktion der Zeit, qualitativ dargestellt. Wenn Sepp seinen Bruder einholt, müssen beide den gleichen Abstand von der Erde haben.

Für den Ort des Einholereignisses muss also gelten:

$$\beta\, c\, t = 0{,}8\, c\,(t-5) \qquad \text{bzw.} \qquad \beta\, t = 0{,}8\, t - 4\,. \tag{6.2}$$

Einsetzen von (6.2) in (6.1) liefert eine quadratische Gleichung, mit der sich t bestimmen lässt. Es gilt

$$256 = t^2 - (0{,}8\, t - 4)^2 = t^2 - 0{,}64\, t^2 + 6{,}4\, t - 16 \quad \text{und damit} \quad 0 = 0{,}36\, t^2 + 6{,}4\, t - 272\,. \tag{6.3}$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung ergibt sich

$$t = \frac{-6{,}4 \pm \sqrt{6{,}4^2 + 4 \cdot 0{,}36 \cdot 272}}{0{,}72} = \frac{-6{,}4 \pm 20{,}8}{0{,}72} = 20\,. \tag{6.4}$$

Die mathematisch ebenfalls mögliche negative Lösung ist hier nicht physikalisch sinnvoll. Für Sepps Alter im Einholereignis ergibt sich daher erneut aufgrund der Zeitdilatation

$$\boxed{20 + 5 + (20-5)\sqrt{1-0{,}8^2} = 25 + 15 \cdot 0{,}6 = 25 + 9 = 34}\,. \tag{6.5}$$

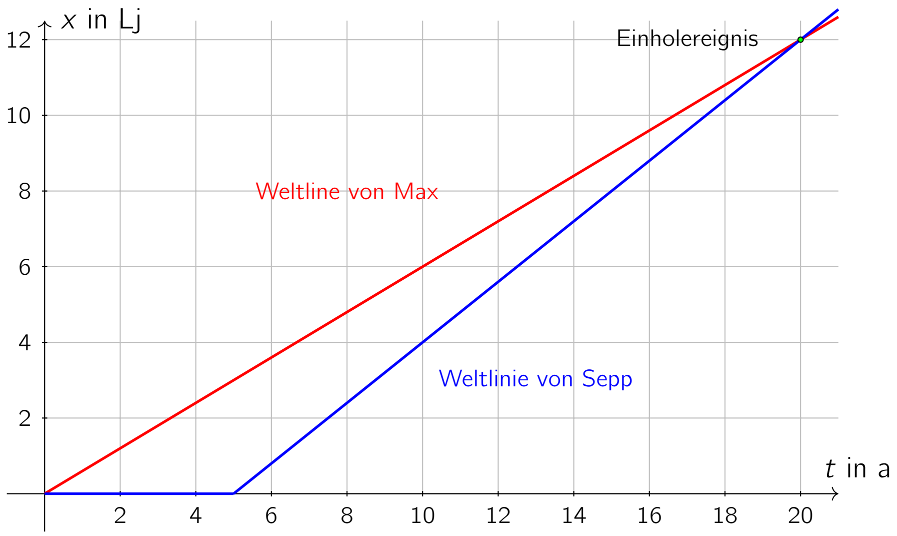


Abb. 4. *Weltlinien der Zwillinge aus Sicht der Erde (quantiative Darstellung).*

Sepp feiert also erst seinen 34. Geburtstag, obwohl sein Zwillingsbruder schon den 36. Geburtstag hat.

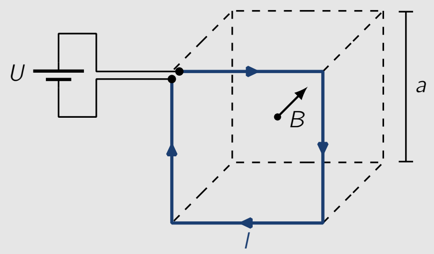
Korrekte Antwort: *C*

Bewertung - Zwillinge auf Reisen (MC-Aufgabe)		**Punkte**
6	Nutzen der Zeitdilatation wie in (6.1)	1.0
	Vergleich der zurückgelegten Wegstrecken (6.2)	1.0
	Lösen des Gleichungssystems für β bzw. t	1.0
	Korrekter Ansatz zum Bestimmen des Alters von Sepp (6.5)	1.0
	Angeben der korrekten Lösung	1.0
		5.0

Aufgabe 7 Magnetfeld eines gebogenen Drahtes (MC-Aufgabe) (5.0 Pkt.)

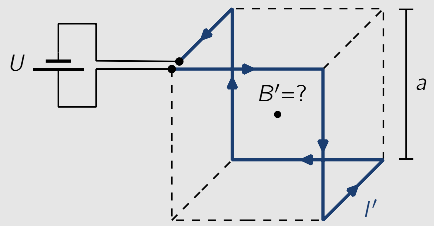
(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Aus einem Stück eines Drahtes wird ein quadratischer Leiter gebogen, der, wie nebenstehend gezeigt, als die Kanten einer Seite eines Würfels der Kantenlänge a aufgefasst werden kann. An die Enden des Leiters wird eine Spannungsquelle mit einer Spannung U angeschlossen. Daraufhin fließt ein Strom der Stromstärke I durch den Leiter.



Der Strom erzeugt ein Magnetfeld in der Umgebung des Leiters. In der Mitte des Würfels besitzt dieses eine magnetische Flussdichte mit einem Betrag B. Die magnetische Flussdichte ist dabei ein Maß für die Stärke des Magnetfeldes.

Ein anderes Stück des Drahtes wird nun so gebogen, dass er entlang der nebenstehend gezeigten Kanten des Würfels verläuft. An die Enden des Drahtes wird ebenfalls eine Spannungsquelle mit einer Spannung U angeschlossen. Daraufhin fließt ein Strom I' durch den Leiter.



Der Widerstand der Zuleitungen kann in beiden Konfigurationen vernachlässigt werden.

Wie groß ist jetzt der Betrag B' der magnetischen Flussdichte des durch den Strom erzeugten Magnetfeldes in der Mitte des Würfels?

A 0 B $\frac{2}{\sqrt{3}}B$ C $\frac{3}{2}B$ D $\sqrt{3}\,B$

Lösung

Rechnungen und Erläuterungen

Ein stromdurchflossener, gerader Leiter erzeugt um ihn herum ein Magnetfeld dessen magnetische Flussdichte proportional zur Stromstärke ist und dessen Magnetfeldlinien konzentrische Kreise um den Leiter sind. Wenn mehrere stromdurchflossene Leiter vorhanden sind, überlagern sich die Magnetfelder - es findet eine Superposition statt.

In der ersten betrachteten Konfiguration führt diese Superposition in der Mitte des Würfels zu einem Magnetfeld[1], das senkrecht zu der Seite orientiert ist, die durch den Leiter begrenzt wird.

Die zweite Konfiguration stellt sich auf den ersten Blick deutlich komplizierter dar. Mit der folgenden Überlegung lässt sich diese Situation aber auf die erste zurückführen.

Der Strom in den Kanten des Würfels ändert sich nicht, wenn wir uns weitere Ströme dazu denken und die nebenstehende Konfiguration mit drei jeweils von einem Strom der Stärke I' durchflossenen quadratischen Leiterschleifen betrachten. Die Stromstärken in den direkt mit der linken unteren Ecke verbundenen Kanten heben sich auf, so dass der Stromfluss in den Würfelkanten identisch zu der zweiten Konfiguration der Aufgabenstellung ist.

Nun liegen aber drei Leiterschleifen wie im ersten Fall vor, für die wir die magnetische Flussdichte bereits kennen. Zu beachten ist, dass die Flussdichten jeweils senkrecht auf den Leiterschleifen und damit senkrecht aufeinander stehen. Daher ergibt sich der Betrag aus einer Vektoraddition identischer, senkrechter Vektoren zu $\sqrt{3}$ der Flussdichte einer Leiterschleife.

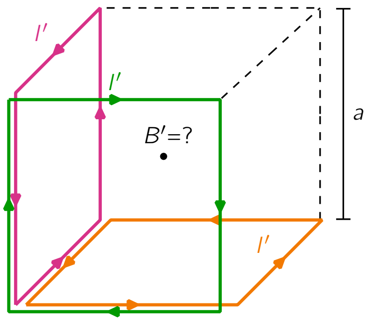


Abb. 5. *Skizze der Ersatzkonfiguration für den zweiten Leiter mit gleichen Stromstärken in den Kanten des Würfels. Die einzelnen Leiterschleifen sind für eine bessere Übersicht unterschiedlich eingefärbt und leicht gegeneinander versetzt.*

Außerdem ist die Stromstärke in den Leitern aufgrund der vergrößerten Drahtlänge und dem damit größeren Gesamtwiderstand des Drahtes geringer als I. In der ersten Konfiguration beträgt die Drahtlänge $4\,a$, wohingegen sie nun $6\,a$ beträgt. Dies führt zu einem Widerstand, der $3/2$ so groß ist wie vorher. Da die angelegte Spannung in beiden Fällen identisch ist, beträgt die Stromstärke I' nach dem ohmschen Gesetz nur noch $2/3\,I$. Da die magnetische Flussdichte aber proportional zur Stromstärke ist, ist auch diese nur $2/3$ so groß wie bei einer Stromstärke I.

Insgesamt ergibt sich daraus für den gesuchten Betrag der magnetischen Flussdichte

$$\boxed{B' = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,B = \frac{2}{\sqrt{3}}\,B}\,. \tag{7.1}$$

Die Flussdichte ist dabei entlang einer Raumdiagonalen des Würfels in Richtung der hinteren, oberen rechten Ecke orientiert.

Korrekte Antwort: *B*

Bewertung - Magnetfeld eines gebogenen Drahtes (MC-Aufgabe)		**Punkte**
7	Erkennen der Superposition der Magnetfelder einzelner gerader Leiter	0.5
	Nutzen einer passenden Ersatzkonfiguration oder anderen zielführenden Idee zur Bestimmung von B'	2.0
	Berücksichtigen der Vektoraddition der Beiträge zur Flussdichte	0.5
	Berücksichtigen der Proportionalität der Flussdichte zur Stromstärke	0.5
	Erkennen, dass Stromstärke auf $\frac{2}{3}\,I$ reduziert ist	0.5
	Angeben der korrekten Lösung	1.0
		5.0

[1] Die magnetische Flussdichte B lässt sich mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes auch explizit ausrechnen und beträgt $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \sin \arctan \sqrt{2}$. Dies ist für diese Aufgabe aber weder notwendig noch gefordert.

Langaufgaben

Bearbeite die folgenden drei Aufgaben ebenfalls in den dafür vorgesehenen Boxen. Anders als bei den Multiple-Choice Aufgaben sind keine Lösungsmöglichkeiten gegeben. Beschreibe deinen Lösungsweg so, dass er gut nachvollziehbar aber nicht unnötig lang ist. Wenn du also zum Beispiel den Energieerhaltungssatz verwendest, schreibe dies kurz hin.

Aufgabe 8 Fahrstuhlschwingungen (20.0 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Stefan Petersen)

Sophia und Alexander nutzen den Aufzug eines hohen Gebäudes für physikalische Experimente. Wenn der Fahrstuhl in einem Stockwerk zum Stehen kommt, springen sie gemeinsam in der Kabine in die Luft. Sie stellen fest, dass die Fahrstuhlkabine direkt nach dem Landen vertikal schwingt. Das wollen sie genauer untersuchen und nutzen einen Beschleunigungssensor, um die Periode dieser Schwingung zu bestimmen. Dabei stellen sie fest, dass die Schwingungsperiode T von dem Stockwerk abhängt, in dem der Fahrstuhl sich gerade befindet.

Dieses Verhalten sollst du mit einem einfachen Modell untersuchen. Nimm dazu an, dass die Fahrstuhlkabine nur an einem Stahlseil hängt, das sich wie eine elastische Feder verhält. Die Federkonstante k des Seils kann ausgedrückt werden durch

$$k = \frac{E\,A}{\ell}\,. \tag{8.1}$$

Dabei bezeichnet E den Elastizitätsmodul des Stahlseils, A dessen Querschnittfläche und ℓ die Länge des Seils. Die Masse des Seils soll gegenüber der Masse der Kabine vernachlässigt werden.

Nimm außerdem an, dass das Antriebsrad und das Seil durch die Bremse vollständig blockiert werden und dass Reibung ansonsten vernachlässigt werden kann.

Abb. 6. *Skizze des Fahrstuhls mit Aufhängung.*

8.a) Bestimme einen Ausdruck für die rückstellende Kraft auf die Fahrstuhlkabine, wenn diese um eine kleine Distanz x mit $|x| \ll \ell$ aus ihrer jeweiligen Ruhelage in vertikale Richtung ausgelenkt wird. *(2.0 Pkt.)*

Die rückstellende Kraft führt zu einer vertikalen Schwingung der Fahrstuhlkabine

8.b) Gib die Periodendauer T dieser Schwingung an und drücke sie durch die Größen E, A, ℓ sowie die Gesamtmasse m der Fahrstuhlkabine mit den Personen drin aus. *(3.0 Pkt.)*

Die folgende Tabelle zeigt die von Sophia und Alexander bestimmten Schwingungsperioden T für einen Halt in verschiedenen Stockwerken. Das Erdgeschoss (EG) befindet sich ungefähr auf Bodenhöhe und jedes Stockwerk ist etwa 3,0 m hoch.

Etage	18	16	14	12	10	8	6	4	2	EG
T / s	0,21	0,23	0,28	0,29	0,30	0,33	0,36	0,38	0,40	0,42
T' / s	0,24	0,30	0,32	0,34	0,38	0,42	0,43	0,48	0,50	0,53

Die untere Zeile der Tabelle mit Werten für T' wird erst in dem letzten Aufgabenteil benötigt.

8.c) Erstelle einen Graphen für T^2 in Abhängigkeit von dem Stockwerk. Bestimme daraus die ungefähre Höhe des Gebäudes. *(6.0 Pkt.)*

Die Berichte von Alexander und Sophie motivieren auch ihren Freundeskreis. Sie wiederholen das Experiment an einem anderen Tag mit einer zusätzlichen Masse von 500 kg in der Fahrstuhlkabine - die beiden haben offenbar viele Freundinnen und Freunde. Die dabei ermittelten Schwingungsperioden sind als T' in der obigen Tabelle aufgeführt.

8.d) Bestimme mit Hilfe der Daten näherungsweise die Masse m der Fahrstuhlkabine mit Sophia und Alexander darin. *(7.0 Pkt.)*

Das betrachtete Modell ist nur eine mehr oder weniger gute Annäherung an die Realität.

8.e) Nenne mindestens zwei physikalische Aspekte, die in der Realität vermutlich zu Abweichungen von dem Modell führen. *(2.0 Pkt.)*

Lösung

8.a) Rechnungen und Erläuterungen

In der Ruhelage gleichen sich die Zugkraft des Seils und die Gewichtskraft auf die Kabine genau aus. Die rückstellende Kraft F bei einer kleinen Auslenkung x aus der Ruhelage wird daher alleine von der Dehnung bzw. Entlastung des Seils hervorgerufen und beträgt, wie bei einer elastischen Feder,

$$\boxed{F = -k\,x = -\frac{E\,A}{\ell}\,x}\,. \tag{8.2}$$

Die Seillänge ℓ bezeichnet dabei nicht die Gesamtlänge des Seils zwischen Kabine und Gegengewicht, sondern nur die Länge des senkrechten Teils zwischen der Bremse des Antriebsrades und der Fahrstuhlkabine.

8.b) Rechnungen und Erläuterungen

Die Kraft beschleunigt die Kabine der Gesamtmasse m entsprechend der Bewegungsgleichung

$$F = m\,\ddot{x} = -k\,x \qquad \text{und damit} \qquad \ddot{x} = -\frac{E\,A}{m\,\ell}\,x\,. \tag{8.3}$$

Das ist die Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung mit Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{E\,A}{m\,\ell}}\,. \tag{8.4}$$

Für die Periodendauer T der Schwingung ergibt sich daraus

$$\boxed{T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m\,\ell}{E\,A}}}\,. \tag{8.5}$$

8.c) Rechnungen und Erläuterungen

Für die Seillänge $\ell = 0$ wird die Periodendauer T nach (8.5) gleich 0 s. Dies ist ungefähr, typischerweise bis auf einige Meter für den Betriebsraum des Fahrstuhls, am oberen Ende des Gebäudes der Fall. Um die Höhe des Gebäudes abzuschätzen, ist also die Position der Fahrstuhlkabine gesucht, für die die Seillänge gleich Null ist. Diese lässt sich graphisch bestimmen.

Aus Gleichung (8.5) ergibt sich für das Quadrat der Periodendauer

$$T^2 = 4\,\pi^2\,\frac{m\,\ell}{E\,A}\,. \tag{8.6}$$

Die Größe T^2 hängt also (affin) linear von der Seillänge und damit auch von dem Stockwerk ab. In der folgenden Tabelle sind die Quadrate der Periodendauern T und T' angegeben.

Etage	18	16	14	12	10	8	6	4	2	EG
T / s	0,21	0,23	0,28	0,29	0,30	0,33	0,36	0,38	0,40	0,42
T^2 / s^2	0,043	0,052	0,077	0,085	0,09	0,109	0,129	0,141	0,162	0,18
T' / s	0,24	0,30	0,32	0,34	0,38	0,42	0,43	0,48	0,50	0,53
T'^2 / s^2	0,059	0,092	0,104	0,119	0,142	0,172	0,186	0,231	0,25	0,276

In Abbildung 7 sind die Daten entsprechend dargestellt.

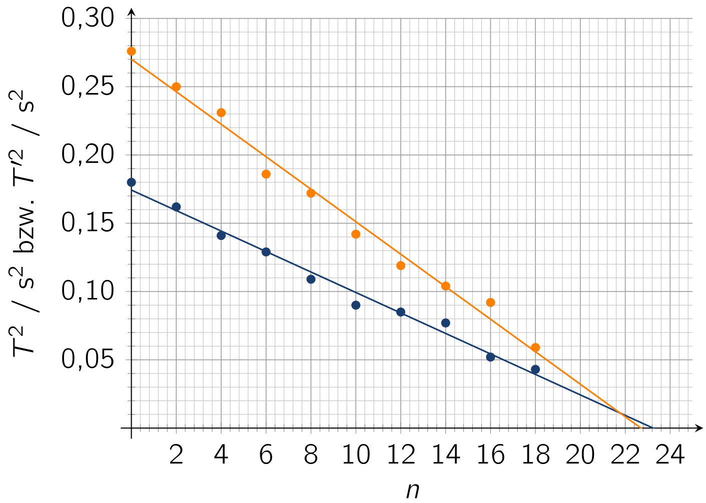


Abb. 7. *Graph der quadrierten Periodendauern T^2 (blau) bzw. T'^2 (orange) der Fahrstuhlkabinenschwingung in Abhängigkeit von dem Stockwerk n in dem sich der Fahrstuhl befindet mit Ausgleichsgeraden.*

Die blaue Ausgleichsgerade für die Werte von T^2 schneidet die x-Achse bei dem Stockwerk $n = 23 \pm 1$. Mit der gegebenen Stockwerkhöhe von $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$ ergibt sich daraus als Abschätzung für die Gebäudehöhe H

$$\boxed{H = (23 \pm 1) \cdot h \approx (69 \pm 3)\,\mathrm{m}}\,. \tag{8.7}$$

Hierbei wurde keine zusätzliche Höhe für den Fahrstuhlbetriebsraum berücksichtigt. Diese kann auch zu anderen Abschätzungen führen.

8.d) Rechnungen und Erläuterungen

Laut Aufgabenstellung ändert sich aufgrund der zusätzlichen Personen im Fahrstuhl die schwingende Masse um $m' = 500\,\mathrm{kg}$. Nach (8.6) ändert sich dadurch auch die Steigung b des linearen Verlaufs der quadrierten Periodendauer. Für diese gilt:

$$b = -\frac{4\,\pi^2\,m}{E\,A} \qquad \text{sowie mit zusätzlicher Masse} \qquad b' = -\frac{4\,\pi^2\,(m + m')}{E\,A}\,. \tag{8.8}$$

Aus dem Verhältnis der beiden Steigungen ergibt sich

$$\frac{b'}{b} = \frac{m + m'}{m} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{m = m'\,\frac{b}{b' - b}}\,. \tag{8.9}$$

Die beiden Steigungen lassen sich aus dem Graphen bestimmen zu

$$b = -\frac{0{,}175\,\mathrm{s}^2}{22{,}6 \cdot h} \approx -0{,}774 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^2/h \quad \text{und} \quad b' = -\frac{0{,}270\,\mathrm{s}^2}{22{,}6 \cdot h} \approx -1{,}21 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^2/h\,. \tag{8.10}$$

Für die Masse des Fahrstuhls mit Sophie und Alexander ergibt sich daraus schließlich

$$\boxed{m = m'\,\frac{b}{b' - b} = 500\,\mathrm{kg}\,\frac{7{,}74 \cdot 10^{-3}}{4{,}37 \cdot 10^{-3}} \approx 890\,\mathrm{kg}}\,. \tag{8.11}$$

Aufgrund der Unsicherheiten bei der Bestimmung der Steigung und des großen Einflusses dieser insbesondere auf die Differenz im Nenner von (8.11) können die Ergebnisse deutlich von diesem Wert abweichen.

8.e) Rechnungen und Erläuterungen

Das Modell gibt die Realität nur stark vereinfacht wieder und vernachlässigt eine Reihe in der Praxis relevanter Aspekte. Hierzu gehören:

- Das schwingende System ist komplexer als eine starre Masse, die an einer einzelnen Feder schwingt. Sowohl die Fahrstuhlkabine als auch die Befestigung am Antriebsrad sind nicht vollständig starr, sondern können auch schwingen.
- Die Schwingung ist eigentlich gedämpft, wodurch sich auch die Periode verändert.
- Die Modellierung des Seils als vollständig elastisch und nahezu masselos ist in der Realität nicht unbedingt zutreffend.
- Die Schwingung wird nicht vollständig vertikal verlaufen.

Hinweis: Teile der Aufgabe sind in ähnlicher Form zu finden in dem Artikel Vogt, P., Kuhn, J., Müller, A. (2014). *Betrachtung des Aufzugs als Federpendel*. Unterricht Physik Nr. 140. Insbesondere sind die Daten an die in dem Artikel angegebenen angelehnt.

Bewertung - Fahrstuhlschwingungen		**Punkte**
8.a)	Erkennen, dass die Gravitationskraft keine Rolle spielt	1.0
	Nutzen des Verhaltens einer Feder und Angeben der Kraft (8.2)	1.0
8.b)	Aufstellen der Bewegungsgleichung, Erkennen der harmonischen Schwingung	1.0
	Angeben der Periodendauer (8.5)	2.0
8.c)	Berechnen der quadrierten Periodendauern T^2	1.0
	Erstellen eines Graphen	2.0
	Idee zur Bestimmung der Höhe aus x-Achsenschnittpunkt im Graphen	1.0
	Erwähnen, dass die so bestimmte Höhe nicht der Gebäudehöhe entsprechen muss	1.0
	Bestimmen einer plausiblen Gebäudehöhe aus Graphen (8.7)	1.0
8.d)	Formulieren der Idee, die Steigungen der Kurven zu vergleichen	1.0
	Theoretische Betrachtung und Ableiten eines Ausdrucks für m (8.9)	1.0
	Berechnen der quadrierten Periodendauern T'^2	1.0
	Eintragen der Werte in den Graphen	1.0
	Bestimmen der Steigungen (8.10) mit $-0{,}80 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^2 \leq b \leq -0{,}74 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^2$ und $-1{,}25 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^2 \leq b \leq -1{,}17 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}^2$	2.0
	Berechnen eines konsistenten Wertes für m (8.11)	1.0
8.e)	Nennen von mindestens zwei relevanten Effekten (je 1 P.)	2.0
		20.0

Hinweis zur Bewertung: In Aufgabenteil b) muss die Bewegungsgleichung nicht explizit genannt werden. Die Punkte sollen auch für das Erkennen der harmonischen Schwingung alleine gegeben werden.

Aufgabe 9 Optical Stretcher (15.0 Pkt.)

(Aufgabengruppe der PhysikOlympiade - Florian Jung)

Mit Laserstrahlen lassen sich gezielt mikroskopische Objekte, wie zum Beispiel Zellen, manipulieren. Ein Werkzeug dazu ist der so genannte *Optical Stretcher*, der zur Untersuchung der elastischen Eigenschaften von Zellen verwendet wird. In dieser Aufgabe sollst du dessen Wirkungsweise untersuchen.

Betrachte dazu eine vereinfachend als würfelförmig angenommene Zelle mit einer Länge von $\ell = 10\,\mu\text{m}$ und einem Brechungsindex von $n_2 = 1{,}45$. Die Zelle befindet sich in Wasser, das einen Brechungsindex von $n_1 = 1{,}33$ besitzt.

Ein Laserstrahl mit einer Leistung $P = 500\,\text{mW}$ trifft, wie nebenstehend skizziert, senkrecht auf die Zelle. An den Grenzflächen findet durch Reflektion ein Impulsübertrag statt. Der Anteil R der von den einfallenden Photonen an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes n und n' reflektiert wird, beträgt

$$R = \left(\frac{n - n'}{n + n'}\right)^2 .$$

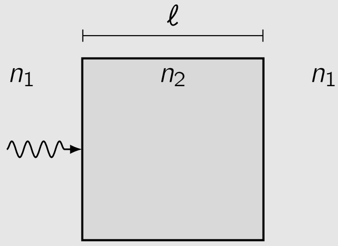


Abb. 8. *Ein Laserstrahl trifft auf die Zelle.*

Nimm an, dass keine Absorption stattfindet und dass Mehrfachreflexionen in der Zelle vernachlässigt werden können.

Bezeichne mit E die Energie eines Photons in dem Laserstrahl und mit p dessen Impuls. Mit dem Planckschen Wirkungsquantum h gelten unabhängig vom Medium, in dem sich das Photon befindet

$$E = h\,f \qquad \text{sowie} \qquad p = \frac{h}{\lambda} .$$

Dabei bezeichnen f und λ die Frequenz bzw. Wellenlänge des Photons.

9.a) Zeige mit Hilfe der obigen Beziehungen, dass sich der Impuls des Photons in einem Medium mit Brechungsindex n schreiben lässt als

$$p = \frac{n\,E}{c} ,$$

wobei c die Vakuumlichtgeschwindigkeit bezeichnet. *(2.0 Pkt.)*

9.b) Betrachte das Auftreffen der Photonen des Laserstrahls auf die vordere Zellwand und bestimme einen Ausdruck für den Impulsübertrag Δp_1 auf die Zellwand. *(4.0 Pkt.)*

9.c) Leite jeweils einen Ausdruck für die Kräfte F_1 und F_2 her, die auf die vordere bzw. hintere Zellwand wirken. *(4.0 Pkt.)*

Die beiden Kräfte führen sowohl zu einer Beschleunigung der Zelle insgesamt als auch zu einer Deformation der Zelle entlang des Laserstrahls.

9.d) Beschreibe, in welcher Weise die Zelle durch die Kräfte deformiert wird. Berechne sowohl die Gesamtkraft $F_1 + F_2$ auf die Zelle als auch die Deformationskraft F_D. Gib außerdem das Verhältnis der Gesamtkraft zur Deformationskraft an. *(5.0 Pkt.)*

In der Praxis kommen zwei gegenläufige Laserstrahlen gleicher Frequenz und Leistung zum Einsatz. Dadurch hebt sich die Gesamtkraft auf die Zelle auf und es verbleibt nur eine deformierende Kraft.

Lösung

9.a) Rechnungen und Erläuterungen

Für die Ausbreitung einer Lichtwelle in einem Medium mit Brechungsindex n gilt

$$\lambda f = \frac{c}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda = \frac{c}{n f}\,. \tag{9.1}$$

Die Frequenz der Welle ist unabhängig vom Brechungsindex des Mediums. Daher ist die Wellenlänge in dem Medium um den Faktor $\frac{1}{n}$ kleiner als die Wellenlänge im Vakuum.

Mit Hilfe der in der Aufgabe gegebenen Zusammenhänge ergibt sich für den Impuls des Photons

$$\boxed{p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\,n\,f}{c} = \frac{n\,E}{c}}\,. \tag{9.2}$$

9.b) Rechnungen und Erläuterungen

An der vorderen Zellwand wird ein Anteil R der Photonen reflektiert, wobei

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \approx 1{,}86 \cdot 10^{-3}\,. \tag{9.3}$$

Bezeichne mit E nun die Energie aller auf die Zellwand treffenden Photonen und mit p deren Gesamtimpuls. Dann gilt mit (9.2) analog zur Betrachtung einzelner Photonen

$$p = \frac{n_1\,E}{c}\,. \tag{9.4}$$

Die Impulse p_r und p_t der an der Zellwand reflektierten bzw. transmittierten Photonen betragen hingegen

$$p_\mathrm{r} = -R\,\frac{n_1\,E}{c} \qquad \text{bzw.} \qquad p_\mathrm{t} = (1-R)\,\frac{n_2\,E}{c}\,. \tag{9.5}$$

Da der Gesamtimpuls vor und nach der Wechselwirkung mit der Zellwand der gleiche sein muss, wird ein Impuls

$$\boxed{\Delta p_1 = p - p_\mathrm{r} - p_\mathrm{t} = \frac{E}{c}\left\{(1+R)\,n_1 - (1-R)\,n_2\right\}}\,. \tag{9.6}$$

auf die vordere Zellwand übertragen. Der Ausdruck lässt sich mit dem Ausdruck für R umschreiben zu

$$\boxed{\Delta p_1 = \frac{E}{c}\left\{(n_1 - n_2) + R\,(n_1 + n_2)\right\} = -\frac{2\,n_1\,E}{c}\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}}\,. \tag{9.7}$$

Der Impulsübertrag ist negativ und damit in der Abbildung nach links orientiert.

9.c)

Rechnungen und Erläuterungen

Auf die hintere Zellwand trifft nur ein Anteil $1 - R$ der Photonen. Da der Übergang nun aus dem Medium mit dem Brechungsindex n_2 in das Medium mit Brechungsindex n_1 stattfindet, vertauschen sich in (9.6) die beiden Indizes. Der Reflexionskoeffizient bleibt dabei identisch, so dass der Impulsübertrag Δp_2 auf die hintere Zellwand gegeben ist durch

$$\boxed{\Delta p_2 = \frac{E}{c}\Big\{(n_2 - n_1) + R\,(n_2 + n_1)\Big\} = \frac{2\,n_2\,E}{c}\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}}\,. \tag{9.8}$$

Die Kräfte auf die Zellwände ergeben sich als Impulsübertrag pro Zeit zu

$$\boxed{F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{P}{c}\Big\{(n_1 - n_2) + R\,(n_1 + n_2)\Big\} = -\frac{2\,n_1\,P}{c}\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}} \tag{9.9}$$

sowie

$$\boxed{F_2 = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = \frac{P}{c}\Big\{(n_2 - n_1) + R\,(n_2 + n_1)\Big\} = \frac{2\,n_2\,P}{c}\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}}\,. \tag{9.10}$$

Dabei gibt die Leistung P die Energie pro Zeit an, die auf die vordere Zellwand trifft.

9.d)

Rechnungen und Erläuterungen

Die beiden Kräfte sind jeweils aus der Zelle hinaus orientiert. Die Zelle wird also durch diese, wie nebenstehend skizziert, entlang des Laserstrahls in die Länge gezogen.

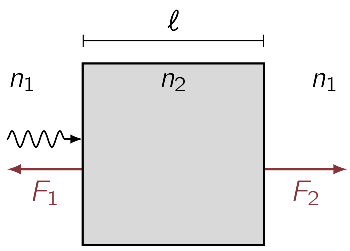


Abb. 9. *Deformation der Zelle durch den Laserstrahl.*

Die Gesamtkraft auf die Zelle beträgt

$$\boxed{F_1 + F_2 = \frac{2\,P}{c}\,\frac{(n_2 - n_1)^2}{n_2 + n_1} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N}}\,. \tag{9.11}$$

Die auf jede der Zellwände wirkende Deformationskraft F_D ist hingegen

$$\boxed{F_\mathrm{D} = \frac{|F_2| + |F_1|}{2} = \frac{F_2 - F_1}{2} = \frac{P}{c}\,(n_2 - n_1) \approx 2{,}0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}}\,. \tag{9.12}$$

Der Faktor 1/2 ergibt sich, da die Deformationskraft jeweils zur Hälfte auf beide Zellwände wirkt.

Für das Verhältnis der Kräfte folgt so schließlich

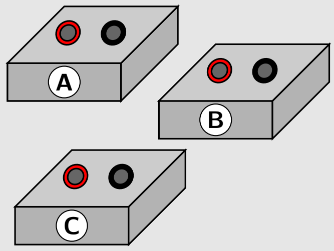
$$\boxed{\frac{F_1 + F_2}{F_\mathrm{D}} = 2\,\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \approx 0{,}085}\,. \tag{9.13}$$

Für das inverse Verhältnis ergibt sich ein Wert von etwa 12.

Bewertung - Optical Stretcher		**Punkte**
9.a)	Verwenden von $\lambda f = c/n$ (9.1)	1.0
	Ableiten des Ergebnisses (9.4)	1.0
9.b)	Bestimmen des Impulses der reflektierten Photonen in (9.5)	1.0
	Bestimmen des Impulses der transmittierten Photonen in (9.5)	1.0
	Verwenden der Impulserhaltung	1.0
	Bestimmen des Impulsübertrags auf die vordere Zellwand (9.6) bzw. (9.7) *(nur 0.5 P., wenn Richtung nicht erkannt wird)*	1.0
9.c)	Nutzen, dass nur ein Anteil $1 - R$ der Photonen auf die hintere Zellwand trifft	0.5
	Erkennen, dass sich R nicht ändert	0.5
	Bestimmen des Impulsübertrags auf die hintere Zellwand (9.8)	1.0
	Idee, dass die Kräfte der zeitlichen Änderung der Impulse entsprechen	1.0
	Bestimmen von Ausdrücken für F_1 (9.9) und F_2 (9.10)	1.0
9.d)	Erläutern der Deformation	1.0
	Ableiten eines Ausdrucks für die Gesamtkraft (9.11)	1.0
	Berechnen des Wertes der Gesamtkraft (9.11)	0.5
	Ableiten eines Ausdrucks für die Deformationskraft (9.12) (mit oder ohne 1/2)	1.0
	Berechnen des Wertes der Deformationskraft (9.12)	0.5
	Berechnen des (inversen) Kraftverhältnisses (9.13)	1.0
		15.0

Aufgabe 10 Schaltungswirrwarr (20.0 Pkt.)

In einer gut sortierten Physiksammlung befinden sich drei kleine Boxen mit jeweils zwei elektrischen Anschlüssen. Die Boxen enthalten Schaltungen aus identischen Bauelementen: Widerständen mit Widerstandswert R, Spulen mit Induktivität L und Kondensatoren mit Kapazität C. In den Boxen **A** und **B** ist von jedem der Bauelemente genau eines verbaut, während in der Box **C** ein weiterer Widerstand mit Widerstandswert R, also insgesamt vier Elemente miteinander verbunden sind.



Um herauszufinden, wie die Bauelemente in den Boxen verschaltet sind, werden die Boxen an einen Wechselspannungsquelle mit variabler Frequenz angeschlossen und der Scheinwiderstand, also der Betrag der komplexen Impedanz, bestimmt. Die folgenden Graphen zeigen die Verläufe der Scheinwiderstände $|Z|$ der Boxen in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω der Wechselspannung.

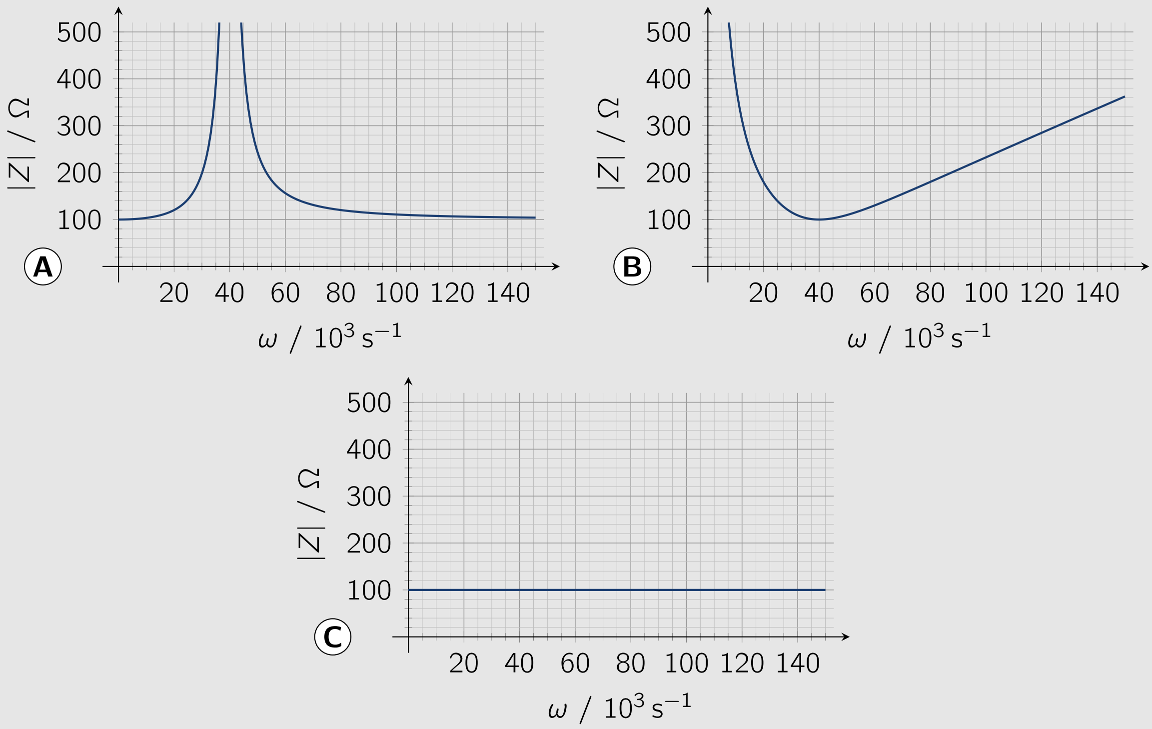


Abb. 10. *Graphen der Scheinwiderstände $|Z|$ der drei Boxen in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω der angelegten Wechselspannung.*

Du kannst alle Bauelemente als ideal annehmen und davon ausgehen, dass die Elemente in den Boxen weder kurzgeschlossen sind noch offene Anschlüsse haben. Schaltungen, die sich nur durch das Vertauschen der Reihenfolge der Glieder in einer Serienschaltung oder der Anordnung der einzelnen Zweige in einer Parallelschaltung unterscheiden, können als äquivalent angesehen und müssen nicht getrennt betrachtet werden.

10.a) Gib alle möglichen, unterschiedlichen Schaltskizzen für den Aufbau der drei Boxen **A**, **B** und **C** an, die mit den jeweiligen Verläufen der Scheinwiderstände kompatibel sind. Begründe deine Schaltungen und warum keine anderen möglich sind. *(11.0 Pkt.)*

10.b) Bestimme mit Hilfe der Graphen die Werte R, L und C. *(5.0 Pkt.)*

Wenn die Boxen **A** und **B** in Serie geschaltet werden, so beträgt der Scheinwiderstand der Schaltung bei bestimmten Kreisfrequenzen der angelegten Spannung genau $2\,R$.

10.c) Bestimme die Werte dieser Kreisfrequenzen. *(4.0 Pkt.)*

Lösung

10.a) Rechnungen und Erläuterungen

Für die komplexen Widerstände oder Impedanzen der drei betrachteten Bauteile in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω der Spannung gilt

$$Z_R = R\,, \qquad Z_L = \mathrm{i}\,\omega\,L\,, \qquad Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\,C} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\,C}\,. \tag{10.1}$$

Ein ohmscher Widerstand zeigt also ein Verhalten, das von der Kreisfrequenz der Wechselspannung unabhängig ist. Die Impedanz der Spule hingegen ist eine lineare Funktion der Kreisfrequenz und die des Kondensators verhält sich invers proportional. Für niedrige Frequenzen besitzt eine Spule also eine niedrige und für hohe eine hohe Impedanz. Bei dem Kondensator ist es genau umgekehrt.

Bei der Verschaltung der Bauelemente addieren sich die komplexwertigen Impedanzen entsprechend der aus Gleichstromnetzen bekannten Regeln für Widerstände. Für den Scheinwiderstand $|Z|$ müssen sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Impedanz berücksichtigt werden.

Box A

Für sehr hohe und sehr niedrige Kreisfrequenzen strebt der Scheinwiderstand der Box **A** einem konstanten Wert von etwa $100\,\Omega$ zu. In diesen Bereichen wirkt also nur der ohmsche Widerstand, dessen Widerstandswert damit ermittelt ist. Die Spule und der Kondensator müssen zueinander parallel und in Reihe zu dem Widerstand angeordnet sein, damit jeweils einer der Parallelzweige bei sehr hohen bzw. sehr niedrigen Kreisfrequenzen durchlässig ist und das Verhalten durch den Widerstand bestimmt ist.

Damit ist die Schaltung in der Box **A** bereits festgelegt und muss der in Abbildung 11 dargestellten Schaltung entsprechen. Eine Vertauschung der Reihenfolge der Bauelemente führt zu keiner qualitativ anderen Schaltung und wird daher als äquivalent betrachtet.

Bei einer Kreisfrequenz von etwa $40 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ wird der Scheinwiderstand der Box **A** so groß, dass er nicht mehr im Graphen dargestellt werden kann. Dieses Verhalten passt ebenfalls zu einem $L\,C$-Schwingkreis, bei dem die Spule und der Kondensator parallel geschaltet sind.

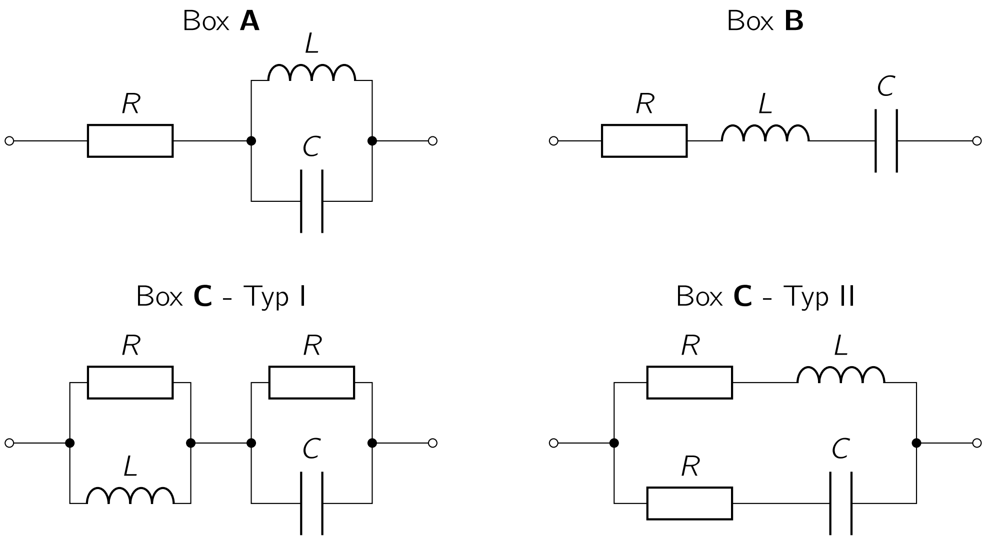


Abb. 11. *Skizze der mit den gegebenen Daten verträglichen Schaltungen in den drei Boxen* **A**, **B** *und* **C**. *Eine Vertauschung der Reihenfolge der Bauelemente wird dabei als äquivalent angesehen und nicht getrennt dargestellt.*

Box B

Für kleine Kreisfrequenzen wird der Scheinwiderstand von Box **B** beliebig groß, für große steigt er etwa linear mit der Frequenz an. Für kleine Kreisfrequenzen dominiert also das Kondensatorverhalten und für große das der Spule. Dieses asymptotische Verhalten lässt sich nur mit einer Reihenschaltung der Spule und des Kondensators, einem LC-Serienschwingkreis, erreichen. Ohne den ohmschen Widerstand würde bei einer bestimmten Frequenz, der Resonanzfrequenz des Schwingkreises, die Impedanz und damit auch der Scheinwiderstand zu Null werden.

Stattdessen beobachten wir aber bei einer Kreisfrequenz von etwa $40 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$ ein Minimum des Scheinwiderstandes der Box **B** von etwa $100\,\Omega$. Dies lässt sich nur dadurch erklären, dass der ohmsche Widerstand ebenfalls in Reihe zu den anderen beiden Bauelementen angeordnet ist.

Damit muss die Schaltung in der Box **B** der in 11 dargestellten Schaltung entsprechen. Eine Vertauschung der Reihenfolge der Bauelemente führt zu keiner qualitativ anderen Schaltung und wird daher als äquivalent betrachtet.

Box C

Der Scheinwiderstand der Box **C** beträgt unabhängig von der Kreisfrequenz etwa $100\,\Omega$. Es ist bekannt, dass in der Box zwei Widerstände mit Widerstandswert R sowie je eine Spule mit Induktivität L und ein Kondensator der Kapazität C verbaut sind.

Zunächst kann festgehalten werden, dass keines der nichtohmschen Elemente (Kondensator und Spule) direkt zwischen den Anschlüssen in einer Serien- oder Parallelschaltung verbaut sein kann, da dies zu einem beliebig hohen oder verschwindend kleinen Scheinwiderstand bei niedrigen bzw. hohen Frequenzen führen würde. Analog kann auch keiner der ohmschen Widerstände in dieser Art verbaut sein, da ansonsten der Gesamtscheinwiderstand der Schaltung entweder größer oder kleiner dem in den ersten Boxen bestimmten Widerstand R wäre. Damit muss die Schaltung eine Kombination aus Parallel- und Serienschaltungen der einzelnen Elemente sein. In Frage kommen daher die beiden nachfolgend dargestellten Schaltungstypen.

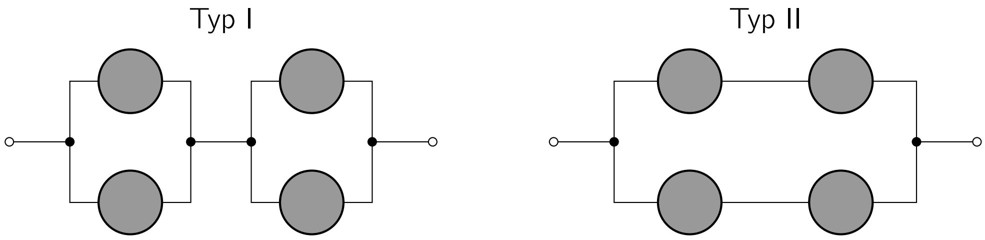


Abb. 12. *Skizze der beiden möglichen Schaltungstypen in der Box* **C**. *Die gefüllten Kreise stehen dabei jeweils für eines der Bauelemente (Widerstand, Kondensator oder Spule).*

Weiter eingeschränkt werden die möglichen Schaltungen dadurch, dass Spule und Kondensator nicht direkt in Serie oder parallel verbaut sein dürfen, da sie ansonsten ungedämpfte Schwingkreise bilden würden, die für bestimmte Frequenzen entweder beliebig hohe (Parallelschwingkreis) oder beliebig kleine (Serienschwingkreis) Scheinwiderstände besitzen, was nicht zu dem gegebenen Verlauf passt. Die verbleibenden beiden Schaltungsmöglichkeiten sind in der unteren Zeile von Abbildung 11 skizziert.

Tatsächlich können beide Schaltungen, das beobachtete Frequenzverhalten des Scheinwiderstandes reproduzieren, was im Folgenden gezeigt wird.

Die Impedanz der Schaltung des Typs I in Abbildung 11 beträgt nach den Regeln für Parallel- und Reihenschaltungen

$$Z_{\mathrm{C\,I}} = \frac{\mathrm{i}\,R\,\omega\,L}{R+\mathrm{i}\,\omega\,L} - \frac{\frac{\mathrm{i}\,R}{\omega\,C}}{R-\mathrm{i}\,\frac{1}{\omega\,C}} = R\,\frac{2\,\frac{L}{C}+\mathrm{i}\,R\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)}{R^2+\frac{L}{C}+\mathrm{i}\,R\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)}\,. \tag{10.2}$$

Für $R=\sqrt{\frac{L}{C}}$ ist dieser Ausdruck unabhänhgig von der Kreisfrequenz. Die Impedanz ist in diesem Fall gegeben durch $Z_{\mathrm{C\,I}}=R$, was zu dem beobachteten Wert des Scheinwiderstandes passt.

Die Impedanz der Schaltung des Typs II hingegen ist

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{C\,II}} &= \frac{(R+\mathrm{i}\,\omega\,L)\left(R-\frac{\mathrm{i}}{\omega\,C}\right)}{2\,R+\mathrm{i}\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)} = \frac{\left\{(R+\mathrm{i}\,\omega\,L)\left(R-\frac{\mathrm{i}}{\omega\,C}\right)\right\}\left\{2\,R-\mathrm{i}\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)\right\}}{4\,R^2+\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)^2} \\ &= \frac{R\left\{2\,R^2+2\,\frac{L}{C}+\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)^2\right\}+\mathrm{i}\left(R^2-\frac{L}{C}\right)\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)}{4\,R^2+\left(\omega\,L-\frac{1}{\omega\,C}\right)^2}\,.\end{aligned} \tag{10.3}$$

Ebenfalls für $R=\sqrt{\frac{L}{C}}$ verschwindet die Kreisfrequenzabhängigkeit und es ergibt sich erneut der konstante Wert $Z_{\mathrm{C\,II}}=R$.

Damit kann die Schaltung in der Box **C** jede der beiden skizzierten Schaltungen in der unteren Zeile von 11 entsprechen. Eine Vertauschung der Reihenfolge der Bauelemente führt zu keiner qualitativ anderen Schaltung und wird daher als äquivalent betrachtet.

10.b) Rechnungen und Erläuterungen

Der Widerstandswert des ohmschen Widerstandes lässt sich, wie im vorigen Aufgabenteil beschrieben, aus dem asymptotischen Verhalten der Box **A** oder dem Minimum des Scheinwiderstandes der Box **B** bestimmen und beträgt

$$\boxed{R = 100\,\Omega}\,. \tag{10.4}$$

Zur Bestimmung von L und C betrachten wir die Impedanzen der Schaltungen in den Boxen **A** und **B**. Diese betragen

$$\begin{aligned} Z_{\mathsf{A}} &= R - \mathrm{i}\,\frac{\frac{L}{C}}{\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}} = R + \mathrm{i}\,\frac{\omega\,L}{1-\omega^2\,L\,C} \\ Z_{\mathsf{B}} &= R + \mathrm{i}\left(\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right) = R + \mathrm{i}\,\frac{1}{\omega\,C}\left(\omega^2\,L\,C - 1\right)\,. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Bei der Resonanzfrequenz $\omega_{\text{Res}} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$ divergiert der Imaginärteil der Impedanz von Box **A** und der von Box **B** wird Null. Für den Scheinwiderstand ergibt sich so im ersten Fall eine Polstelle und im zweiten ein Minimum. Im Graphen lässt sich die Resonanzfrequenz bestimmen zu $\omega_{\text{Res}} = 40\cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$.

Aus dem Verhalten der Box **C** wissen wir außerdem, dass $R = \sqrt{\frac{L}{C}} = 100\,\Omega$ sein muss. Damit lassen sich die Induktivität L der Spule und die Kapazität C des Kondensators bestimmen zu

$$\boxed{L = \frac{R}{\omega_{\text{Res}}} \approx 2{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}} = 2{,}5\,\mathrm{mH}} \tag{10.6}$$

sowie

$$\boxed{C = \frac{1}{\omega_{\text{Res}}\,R} \approx 2{,}5\cdot 10^{-7}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}} = 0{,}25\,\mu\mathrm{F}}\,. \tag{10.7}$$

Hinweis: Die Größen L und C lassen sich auch ohne Verwendung der Schaltung in Box **C** bestimmen. Für hohe Kreisfrequenzen wird der Scheinwiderstand von Box **B** durch die Spule dominiert. Die Steigung des Scheinwiederstandes entspricht nach (10.1) dem Wert von L. Aus dem Graphen ergibt sich $L \approx \frac{340-180}{140-80}\mathrm{mH} \approx 2{,}7\,\mathrm{mH}$ und damit aus der Resonanzfrequenz $C = \frac{1}{\omega_{\text{Res}}^2\,L} \approx 0{,}23\,\mu\mathrm{F}$.

10.c) Rechnungen und Erläuterungen

Bei dem Hintereinanderschalten der Boxen **A** und **B** ergibt sich mit (10.5) eine Impedanz $Z_{\mathsf{A+B}}$ von

$$Z_{\mathsf{A+B}} = 2\,R + \mathrm{i}\left(\frac{\omega\,L}{1-\omega^2\,L\,C} + \omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}\right) = 2\,R - \mathrm{i}\left(\frac{\omega^3\,L^2\,C - 3\,\omega\,L + \frac{1}{\omega\,C}}{1-\omega^2\,L\,C}\right)\,. \tag{10.8}$$

Damit der Scheinwiderstand der Schaltung $2\,R$ entspricht, muss der Imaginärteil der Impedanz verschwinden. Es muss also gelten:

$$0 \stackrel{!}{=} \omega^4 - 3\,\omega^2\,\frac{1}{L\,C} + \frac{1}{L^2\,C^2}\,. \tag{10.9}$$

Damit ergeben sich die beiden möglichen Kreisfrequenzen, bei denen der Widerstand der Serienschaltung gerade $2\,R$ ist, aus dieser biquadratischen Gleichung zu

$$\boxed{\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2\,L\,C}}}, \tag{10.10}$$

und es ist $\boxed{\omega_1 \approx 1{,}618 \cdot \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \approx 64{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}}$ sowie $\boxed{\omega_2 \approx 0,618 \cdot \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \approx 24{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}}$.

Hinweis: Die Aufgabe war in einer etwas schwereren Fassung eine Hausaufgabe der 2. Runde zur IPhO 2013. Die damalige Aufgabe kann mit einer Lösung auf der Webseite der PhysikOlympiade heruntergeladen werden..

Bewertung - Schaltungswirrwarr		**Punkte**
10.a)	Beschreiben relevanter Charakteristika des Scheinwiderstandes von Box **A**	1.0
	Erkennen und Begründen, dass L und C in Box **A** parallel geschaltet sein müssen	0.5
	Erkennen und Begründen, dass R in Box **A** in Serie geschaltet sein muss	0.5
	Angeben der Schaltung in Box **A** und Begründen der Eindeutigkeit	1.0
	Beschreiben relevanter Charakteristika des Scheinwiderstandes von Box **B**	1.0
	Erkennen und Begründen, dass L und C in Box **B** in Serie geschaltet sein müssen	0.5
	Erkennen und Begründen, dass R in Box **B** in Serie geschaltet sein muss	0.5
	Angeben der Schaltung in Box **B** und Begründen der Eindeutigkeit	1.0
	Beschreiben relevanter Charakteristika des Scheinwiderstandes von Box **C**	1.0
	Untersuchung möglicher Schaltungen und Erkennen, dass nur zwei Schaltungstypen möglich sind	2.0
	Angeben beider Schaltungen für Box **C** und Begründen, dass keine weiteren möglich sind	1.0
	Zeigen, dass beide Schaltungen den beobachteten Frequenzverlauf reproduzieren	1.0
10.b)	Formulieren passender Ideen und Gleichungen zur Bestimmung der Größen	2.0
	Bestimmen der Widerstandes (10.4) mit $R = 100\,\Omega \pm 5\,\%$	1.0
	Bestimmen der Induktivität (10.6) mit $L = 2{,}5\,\mathrm{mH} \pm 10\,\%$	1.0
	Bestimmen der Kapazität (10.7) mit $C = 0{,}25\,\mu\mathrm{F} \pm 10\,\%$	1.0
10.c)	Angeben der Gesamtimpedanz (10.9)	1.0
	Ableiten einer biquadratischen Gleichung für die Kreisrequenzen	1.0
	Bestimmen eines Ausdrucks für die Kreisfrequenzen (10.10)	1.0
	Berechnen der beiden Werte für die Kreisfrequenzen	1.0
		20.0